www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

I. S. C. I. D. **Régime général** **CONCOURS A 1989** **EPREUVE DE MATHEMATIQUE**

PROBLEME (I)

PARTIE (A)

QUESTION 1)

Soit X un aléa de Poisson de paramètre μ réel strictement positif. Pour k entier naturel $P(X = k)$ est la probabilité que X prenne la valeur k.

1)Calculer en fonction de μ et de l'entier naturel k le rapport $P(X = k+1) / P(X = k)$. En déduire que si μ est un entier naturel non nul, la distribution de X admet deux modes.

2)On note F la fonction répartition de X, et l'on considère l'application g de $\mathbb{R}^*_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par:

$$\mu \longrightarrow g(\mu) = F(2)$$

Etudier les variations de g et préciser les valeurs de $g(\mu)$, pour $\mu \in \{ 2,3,4 \}$. Déterminer μ sachant que:

$$\mu \in \mathbb{N}^*, \quad P(X>2) > 0,8 \quad \text{et que} \quad P(X = 0) > 0,004.$$

QUESTION 2)

On suppose dans cette question que X et Y sont deux aléas de Poisson indépendants de paramètres respectifs μ et μ' et l'on rappelle que la variable aléatoire $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu + \mu'$. Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, calculer la probabilité de l'événement " $(X = a)$ sachant $(S = b)$ ". Quelle est la loi de X conditionnée par " $(S = b)$ " ?

PARTIE (B)

Dans un grand magasin de vente d' appareils électroménagers, la demande hebdomadaire, pour un type A d'appareils, est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = 5$.

QUESTION 1)

1)Quelle est (ou quelles sont) la (ou les) valeur(s) la (ou les) plus probable(s) de la demande hebdomadaire?

2)Calculer les probabilités suivantes:

$P (2 < X \leq 4)$ et $P_{X \geq 3} (X>4)$

QUESTION 2)

On suppose qu'en début de chaque semaine le magasin dispose d'un stock s d'appareils du type A et l'on dit qu'il y a rupture de stock si la demande en cours de semaine est strictement supérieure à s .

1)Calculer la probabilité p qu'il y ait rupture de stock au cours de la semaine si $s = 8$.

2)Quelle sera en moyenne sur une annnée de 52 semaines le nombre de semaines au cours desquelles il y aura une rupture de stock si en début de chaque semaine $s = 8$?

QUESTION 3)

On suppose que les demandes hebdomadaires d'appareils du type A pendant les quatre premières semaines de l'année sont quatre aléas de Poisson indépendants X_1, X_2, X_3, X_4 de même paramètre $\mu = 5$ et l'on note Z la somme $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

1)Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.

2)Calculer la probabilité de l'événement "(X1 = 3)" conditionné par l'événement "(Z = 7)".

TSVP

PROBLEME (II)

PARTIE (A)

QUESTION 1)

Etudier les variations de la fonction h définie sur IR par:

$t \longmapsto 1 + (t - 1)e^t$.

On ne demande pas de courbe représentative.

QUESTION 2)

Soit θ la fonction définie sur IR par:

$$\begin{cases} t \longmapsto (e^t - 1)/t & \text{si } t \neq 0 \\ \theta(0) = 1 . \end{cases}$$

1)Montrer que θ est continue et dérivable sur IR.
2)Etudier les variations de θ et en déduire que θ réalise une bijection de IR sur IR*+.
On ne demande pas de courbe représentative.

PARTIE (B)

On note E le IR-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur IR .
On note U l'application définie sur E par:

$\forall f \in E \quad f \longmapsto U(f) = \tilde{g}$ où $\tilde{g}$ est la fonction définie sur IR par:

$$\forall x \in IR \quad \tilde{g}(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt . \qquad (I)$$

QUESTION 1)

1)Montrer que U est linéaire.
2)Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable et préciser $\tilde{g}'(x)$.
3)En déduire que U est un endomorphisme non surjectif de E.

QUSTION 2)

On note $F_{(T)}$ le sous espace vectoriel de E formé des fonctions continues sur IR et de période T et W la restriction de U à $F_{(T)}$.

1)Montrer que $F_{(T)}$ est stable par W.
2)Calculer $\tilde{g}'(x)$ si $\tilde{g} = U(f)$ avec f élément de $F_{(T)}$ dans le cas où T = 1.
3)Montrer que si f est continue de période T = 1

et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ alors, $\forall x \in R \quad \tilde{g}(x) = 0$

4)Vérifier que la fonction f définie sur IR par: $t \longmapsto \sin(2\pi t)$ satisfait aux conditions de la question précédente . U est-il injectif?

TSVP

QUESTION 3)

Calculer $\underline{g}(x)$ dans les cas suivants:

1) f: $\forall t \in \mathbb{R}$ $t \longmapsto a$ a réel donné
2) f: $\forall t \in \mathbb{R}$ $t \longmapsto t^n$ $k \in \mathbb{N}^*$
3) f: $\forall t \in \mathbb{R}$ $t \longmapsto e^{\alpha t}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

QUESTION 4)

Dans cette question f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\underline{g} = U(f)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que si f est convexe $\underline{g}$ est convexe.

QUESTION 5)

1) Ecrire le développement limité de $\ln(1 + u)$ au voisinage de $u = 0$ à l'ordre 2 . En déduire le développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de:

$$x \longmapsto \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{2x + x^2}{2}\right)$$

2) On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$t \longmapsto \ln(1 + t^2)$$

Calculer dans ce cas le développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de $\underline{g}'(x)$ si $\underline{g} = U(f)$. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de $\underline{g}(x) - \underline{g}(0)$.

(II)

On note E_3 le sous espace de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et de la fonction nulle et l'on note V la restriction de U à E_3.

QUESTION 1)

1) Déduire du 2) question 3 (I) que E_3 est stable par V et donc que V est un endomorphisme de E_3.

2) Ecrire A la matrice de V dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E_3.

QUESTION 2)

1) V est-elle bijective ? si oui calculer A^{-1}.

2) Quelles sont les valeurs propres de A? A est-elle diagonalisable?

(III)

On dira qu'un réel μ est valeur propre pour U s'il existe une fonction f non nulle de E telle que $\underline{g} = U(f) = \mu f$.

QUESTION 1)

Montrer à l'aide des résultats des parties (I) et (II) que 0 et 1 sont valeurs propres pour U et donner des fonctions propres associées à ces valeurs propres.

QUESTION 2)

1) Déduire du 3) question 3 (I) que :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \mu = (e^{\alpha} - 1)/\alpha$ est valeur propre pour U

et que:

$t \longmapsto e^{\alpha t}$ est une fonction propre associée.

2) Montrer à l'aide des résultats de la partie A que tout réel strictement positif est valeur propre pour U. En déduire que tout réel positif est valeur propre pour U.

* * *

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail